Gérer le(s) risque(s) de liquidité - Application aux différents styles de hedge funds

Serge DAROLLES[1], Guillaume ROUSSELLET[2]

[1] *Université Paris-Dauphine*

[2] *McGill University*

Conseil Scientifique de l'AMF - 10 Avril 2018

Contents

Les hedge funds et le(s) risque(s) de liquidité

- Une grande diversité de styles d'investissement avec un niveau variable d'exposition à...
- ... la liquidité de marché (via les instruments financiers utilisés)
- ... la liquidité de financement (via les restrictions de liquidité imposées)
- Donc différents niveaux de transformation de liquidité (Agarwal, Aragon & Shi, 2017, Aragon, Ergun, Getmansky & Girardini, 2017)
- Mais ce risque de transformation est **géré** (*par exemple* via le choix endogéne de restrictions de liquidité - Hombert & Thesmar, 2014) - **Comment ?**

Notre approche

- Un modèle structurel pour le cash management d'un fonds ouvert, quand le fonds doit faire face simultanément à des chocs de liquidité de financement et de marché
- Un choc de liquidité de financement correspond au rachat d'un certain pourcentage du montant géré (*AUM*)
- Un choc de liquidité de marché correspond à un haircut appliqué à la valeur des actifs illiquides dans le cas de vente forcée (*fire sales*)
- Dans certains cas, le modèle permet de calculer de manière explicite la quantité optimale de cash et le coût de gestion de la liquidité
- Dans le cas général, la résolution numérique du modèle permet de confirmer les résultats obtenus dans les cas simples

Nos principaux résultats

- Le modèle permet d'obtenir la forme explicite de la probabilité de défaut d'un fonds (utile pour le calibrage du modèle)
- La politique optimale de cash management dépend à la fois des conditions de liquidité de marché et de financement (Liquidity timing)
- La probabilité de défaut du fonds ne dépend pas des chocs de liquidité de financement (Liquidity resilience)
- La transformation de liquidité opérée par le fonds favorise le transfert des chocs de liquidité du marché du financement vers le marché des titres (Liquidity contagion)
- Les restrictions de liquidité (Gates) permettent de limiter cet effet de contagion de liquidité

Contents

Hypothèses fondamentales

3 dates: $t = 0, 1, 2$ - un unique fonds ouvert

- risque neutre
- price-taker
- de taille unitaire

a accés à 2 actifs:

- **Cash:** taux d'intérêt nul, disponible en $t = 0, 1, 2$
- **Actif illiquide:** taux d'intérêt connu $\rho_1 + \rho_2$, échangeable en $t = 0, 2$

Bilan simplifié du fonds:

Assets	Liabilities
Cash Actif illiquide	1

Hypothèses fondamentales

3 dates: $t = 0, 1, 2$ - un unique fonds ouvert

- risque neutre
- price-taker
- de taille unitaire

a accés à 2 actifs:

- **Cash:** taux d'intérêt nul, disponible en $t = 0, 1, 2$
- **Actif illiquide:** taux d'intérêt connu $\rho_1 + \rho_2$, échangeable en $t = 0, 2$

Bilan simplifié du fonds:

Assets	Liabilities
Cash Actif illiquide	1

Timing

$t = 0$ $\rightarrow$ Le gérant compose son portefeuille $(\delta, 1-\delta)$ en cash/actif illiquide

$t = 1$ $\rightarrow$ Avec une probabilité π, une fraction θ du fonds est rachetée:

- $\theta \sim \mathcal{U}[0, \overline{\theta}]$, avec $\overline{\theta} \leqslant 1$ *(gates)*
- Si $\theta \leqslant \delta$, le fonds paie le rachat avec du cash
- So $\theta > \delta$, le fonds doit vendre l'actif illiquide sur un marché secondaire

$t = 2$ $\rightarrow$ L'actif illiquide résiduel est vendu et le fonds est fermé

Choc de liquidité de financement

La réalisation de θ matérialise le choc de liquidité

Les caractéristiques du choc sont données par les paramètres π et $\overline{\theta}$

Timing

$t = 0$ $\rightarrow$ Le gérant compose son portefeuille $(\delta, 1 - \delta)$ en cash/actif illiquide

$t = 1$ $\rightarrow$ Avec une probabilité π, une fraction θ du fonds est rachetée:

- $\theta \sim \mathcal{U}[0, \overline{\theta}]$, avec $\overline{\theta} \leqslant 1$ *(gates)*
- Si $\theta \leqslant \delta$, le fonds paie le rachat avec du cash
- So $\theta > \delta$, le fonds doit vendre l'actif illiquide sur un marché secondaire

$t = 2$ $\rightarrow$ L'actif illiquide résiduel est vendu et le fonds est fermé

Choc de liquidité de financement

La réalisation de θ matérialise le choc de liquidité

Les caractéristiques du choc sont données par les paramètres π et $\overline{\theta}$

Timing

$t = 0$ $\rightarrow$ Le gérant compose son portefeuille $(\delta, 1-\delta)$ en cash/actif illiquide

$t = 1$ $\rightarrow$ Avec une probabilité π, une fraction θ du fonds est rachetée:

- $\theta \sim \mathcal{U}[0, \overline{\theta}]$, avec $\overline{\theta} \leqslant 1$ *(gates)*
- Si $\theta \leqslant \delta$, le fonds paie le rachat avec du cash
- So $\theta > \delta$, le fonds doit vendre l'actif illiquide sur un marché secondaire

$t = 2$ $\rightarrow$ L'actif illiquide résiduel est vendu et le fonds est fermé

Choc de liquidité de financement

La réalisation de θ matérialise le choc de liquidité

Les caractéristiques du choc sont données par les paramètres π et $\overline{\theta}$

Timing

$t = 0 \rightarrow$ Le gérant compose son portefeuille $(\delta, 1 - \delta)$ en cash/actif illiquide

$t = 1 \rightarrow$ Avec une probabilité π, une fraction θ du fonds est rachetée:

- $\theta \sim \mathcal{U}[0, \overline{\theta}]$, avec $\overline{\theta} \leqslant 1$ *(gates)*
- Si $\theta \leqslant \delta$, le fonds paie le rachat avec du cash
- So $\theta > \delta$, le fonds doit vendre l'actif illiquide sur un marché secondaire

$t = 2 \rightarrow$ L'actif illiquide résiduel est vendu et le fonds est fermé

Choc de liquidité de financement

La réalisation de θ matérialise le choc de liquidité

Les caractéristiques du choc sont données par les paramètres π et $\overline{\theta}$

Fire sales - version simplifiée

Choc de liquidité de marché

Le prix à $t = 1$ de l'actif illiquide sur le marché secondaire $\tilde{P}_1 < P_1$ est égal à:

$$\tilde{P}_1 = e^{-T} \times \mathcal{S}(\theta - \delta) \times P_1$$

où T matérialise le choc de liquidité de marché *(haircut)*:

$$T \sim \mathcal{E}(\lambda), \lambda > 0$$

où $\mathcal{S}(\theta - \delta)$ est la fonction de market impact *(contagion)*:

$$\mathcal{S}(\theta - \delta) = \frac{1}{1 + a(\theta - \delta)^{\lambda+1} \cdot \mathbb{1}_{\{\theta - \delta > 0\}}} \quad \text{où} \quad a \geqslant 0$$

Les caractéristiques du choc sont données par le paramètre λ

Fire sales - version avancée

Choc de liquidité de marché

Le prix à $t = 1$ de l'actif illiquide sur le marché secondaire $\tilde{P}_1 < P_1$ est égal à:

$$\tilde{P}_1 = e^{-T} \times \mathcal{S}(\theta - \delta) \times P_1$$

où T matérialise le choc de liquidité de marché *(haircut)*:

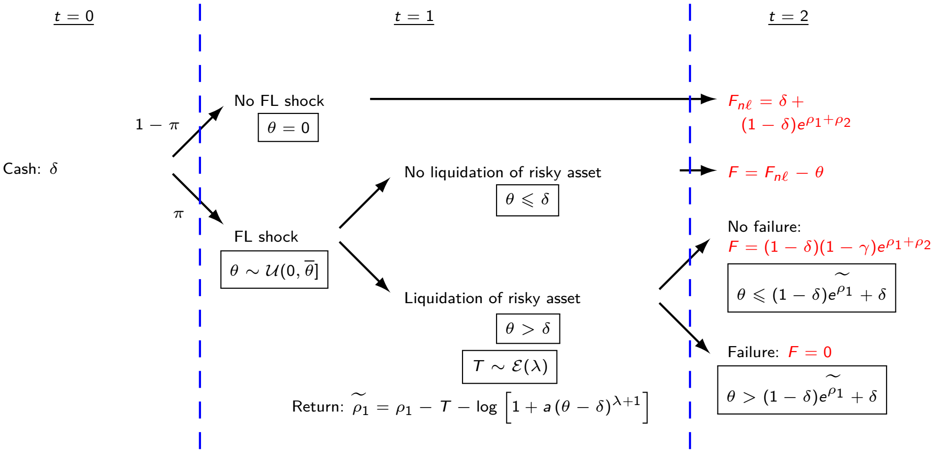
$$T \sim \mathcal{E}(\lambda), \lambda > 0$$

où $\mathcal{S}(\theta - \delta)$ est la fonction de market impact *(contagion)*:

$$\mathcal{S}(\theta - \delta) = \frac{1}{1 + a(\theta - \delta)^{\lambda+1} \cdot \mathbb{1}_{\{\theta - \delta > 0\}}} \quad \text{où} \quad a \geqslant 0$$

Les caractéristiques du choc sont données par les paramètres λ et a

Résumé


$t = 0$
$t = 1$
$t = 2$
Cash: δ
$1 - \pi$
π
No FL shock
$\theta = 0$
$F_{n\ell} = \delta + (1-\delta)e^{\rho_1+\rho_2}$
FL shock
$\theta \sim \mathcal{U}(0, \overline{\theta}]$
No liquidation of risky asset
$\theta \leqslant \delta$
$F = F_{n\ell} - \theta$
Liquidation of risky asset
$\theta > \delta$
$T \sim \mathcal{E}(\lambda)$
Return: $\widetilde{\rho_1} = \rho_1 - T - \log\left[1 + a(\theta - \delta)^{\lambda+1}\right]$
No failure:
$F = (1-\delta)(1-\gamma)e^{\rho_1+\rho_2}$
$\theta \leqslant (1-\delta)e^{\widetilde{\rho_1}} + \delta$
Failure: $F = 0$
$\theta > (1-\delta)e^{\widetilde{\rho_1}} + \delta$

Le problème d'allocation

- La solution triviale $\delta = 0$ (zéro cash) n'est en général pas optimale du fait du défaut
- Le gérant cherche donc en $t = 0$ la quantité optimale δ^* qui maximise l'espérance de la valeur du portefeuille à la date $t = 2$:

$$\delta^* = \underset{\delta}{\operatorname{argmax}}\, \mathbb{E}[F(\delta, \pi, \overline{\theta}, \lambda, a, \rho_1, \rho_2)]$$

π: *rachat*

$\overline{\theta}$: *gates* ($\overline{\theta} = 1$ dans la version simplifiée)

λ: *haircut*

a: *contagion* ($a = 0$ dans la version simplifiée)

Première étape de la résolution

- La probabilité de défaut du fonds pour un niveau de cash donné est donnée explicitement par:

Probabilité de Défaut (PD)

$$\mathbb{P}(D) = \frac{\pi}{\overline{\theta}} \left[\overline{\theta} - \delta - \theta^* + \frac{\left(1 + a{\theta^*}^{\lambda+1}\right)^{\lambda+1} - 1}{a(1-\delta)^{\lambda}(\lambda+1)^2} e^{-\lambda\rho_1} \right]$$

Seconde étape de la résolution

- L'espérance de la valeur finale du portefeuille en $t = 0$ est:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(F) \quad = \quad & (1-\pi)\left[\delta + (1-\delta)e^{\rho_1+\rho_2}\right] + \pi\frac{\delta}{\overline{\theta}}\left((1-\delta)e^{\rho_1+\rho_2} + \frac{\delta}{2}\right) + (1-\delta)e^{\rho_1+\rho_2}\frac{\pi}{\overline{\theta}} \times \\ & \left\{\theta^* + \left(\frac{{\theta^*}^2}{2} + a\frac{{\theta^*}^{\lambda+3}}{\lambda+3}\right)\frac{\lambda e^{-\rho_1}}{(1-\delta)(1-\lambda)} - \left(1 + \frac{\lambda e^{-\lambda\rho_1}}{1-\lambda}\right)\frac{\left(1 + a{\theta^*}^{\lambda+1}\right)^{\lambda+1} - 1}{a(\lambda+1)^2(1-\delta)^{\lambda}}\right\}\end{aligned}$$

Solutions

- Quand $\overline{\theta} = 1$ et $a = 0$, le problème a une solution explicite
- Quand $\overline{\theta} < 1$ et $a \neq 0$, il faut avoir recours à une résolution numérique

Contents

Cas $\overline{\theta} = 1$ et $a = 0$

Montant optimal de cash *(et coût de gestion de la liquidité)*

$$\delta^*(1, \lambda, \pi, \rho_1, \rho_2) = \frac{G(\lambda, \rho_1) + H_1(\pi, \rho_1, \rho_2)}{G(\lambda, \rho_1) + H_2(\rho_1, \rho_2)}$$

avec

$$\begin{aligned} G(\lambda, \rho_1) &= \frac{\lambda}{\lambda + 1} + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \left(\frac{e^{-\rho_1}}{2} - \frac{e^{-\lambda \rho_1}}{\lambda + 1} \right) \\ H_1(\pi, \rho_1, \rho_2) &= \left(\frac{1}{\pi} - 1 \right) \frac{1 - e^{-\rho_1 - \rho_2}}{2} - \frac{1}{2}, \quad H_2(\rho_1, \rho_2) = \frac{e^{-\rho_1 - \rho_2}}{2} - 1 \end{aligned}$$

- δ^* est une fonction de λ via $G(\cdot)$ uniquement
- δ^* est une fonction de π via $H_1(\cdot)$ uniquement

$\Longrightarrow$ L'influence des différents paramètres est facile à analyser

Cas $\overline{\theta} = 1$ et $a = 0$

Résultat (1/4): liquidity timing

- δ^* est une fonction croissante de la probabilité de rachat π
- δ^* est une fonction décroissante du paramètre de haircut λ

Résultat (2/4): liquidity resilience

- La PD ne dépend pas de la probabilité de rachat π
- La PD une fonction décroissante du paramètre de haircut λ

Cas $\overline{\theta} = 1$ et $a = 0$

Résultat (1/4): liquidity timing

- δ^* est une fonction croissante de la probabilité de rachat π
- δ^* est une fonction décroissante du paramètre de haircut λ

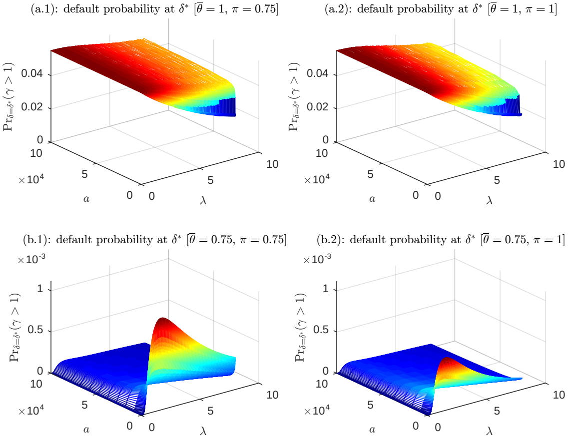
Résultat (2/4): liquidity resilience

- La PD ne dépend pas de la probabilité de rachat π
- La PD une fonction décroissante du paramètre de haircut λ

Contents

Cas $\overline{\theta} < 1$ et $a \neq 0$

La plupart des résultats précédents tiennent mais la PD est désormais une fonction complexe de π et λ



Cas $\overline{\theta} < 1$ et $a \neq 0$

Résultat (3/4): Liquidity contagion

- La transformation de liquidité amplifie le transfert des chocs de liquidité du marché du financement vers le marché des titres

Résultat (4/4): Liquidity restrictions

- Dss conditions de liquidité plus restrictives (gates) permettent de limiter ce transfert

Cas $\overline{\theta} < 1$ et $a \neq 0$

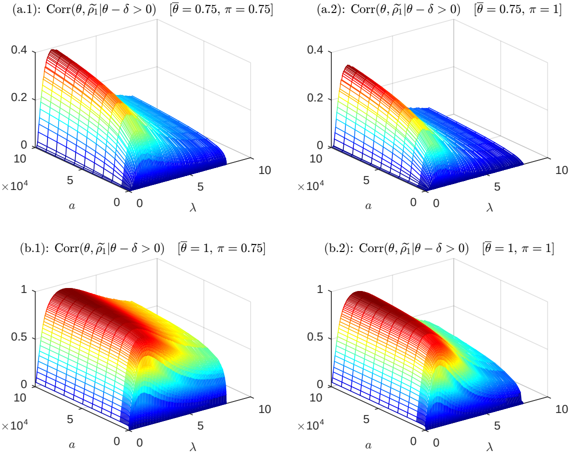
Résultat (3/4): Liquidity contagion

- La transformation de liquidité amplifie le transfert des chocs de liquidité du marché du financement vers le marché des titres

Résultat (4/4): Liquidity restrictions

- Dss conditions de liquidité plus restrictives (gates) permettent de limiter ce transfert

Figure: Correlation between funding and market liquidity shock when the fund has optimal cash holdings $\delta^*(\overline{\theta}, \pi, \lambda, \rho_1, \rho_2, a)$



Contents

Description des données

Lipper TASS database de 2000 à 2015:

- Fonds communiquant une performance en USD
- Fonds à liquidité mensuelle
- Fonds single (pas de FoF)

$\Longrightarrow$ 9 styles de gestion avec des expositions différentes au risque de liquidité de marché et de financement

Séries de données par style

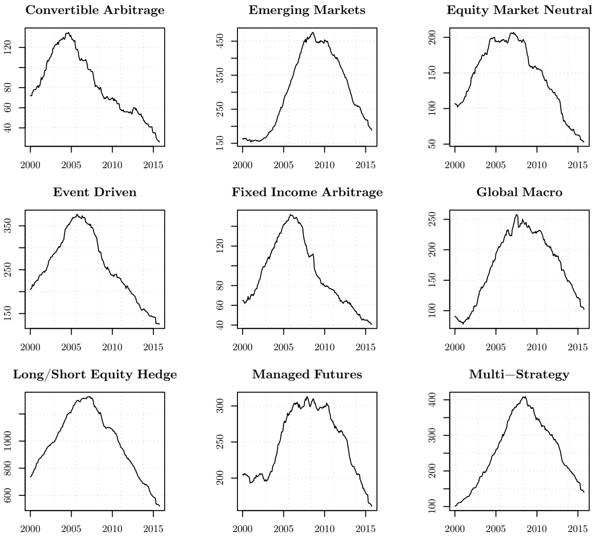
Taille: n_t est le nombre de fonds à la date t

Performance: $r_{j,t}$ est le rendement du fonds j^{th}

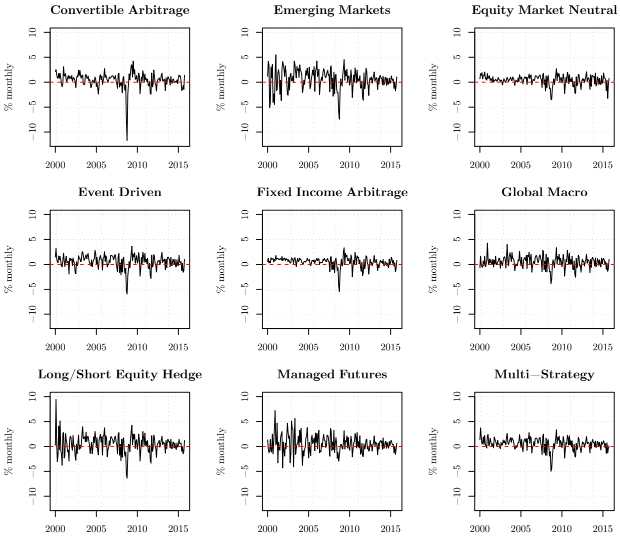
Flux: $f_{j,t}$ est la différence entre les investissements et les rachats

Défaut: $d_{j,t} = 1$ si le fonds j^{th} cesse de communiquer sa performance en t

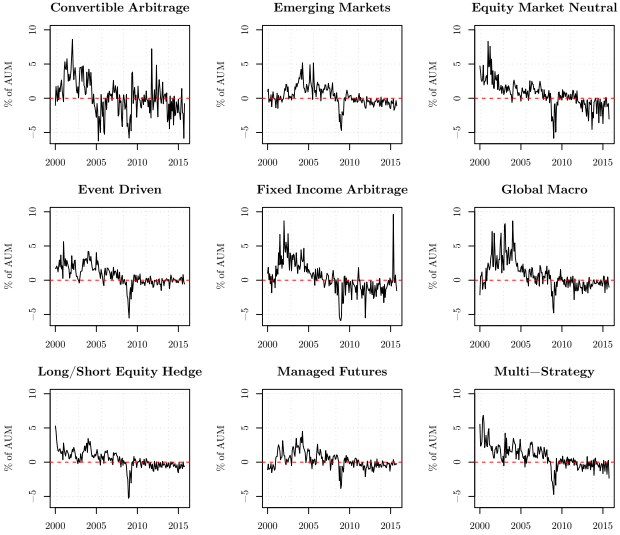
Nombre de fonds par style (2000-2015)



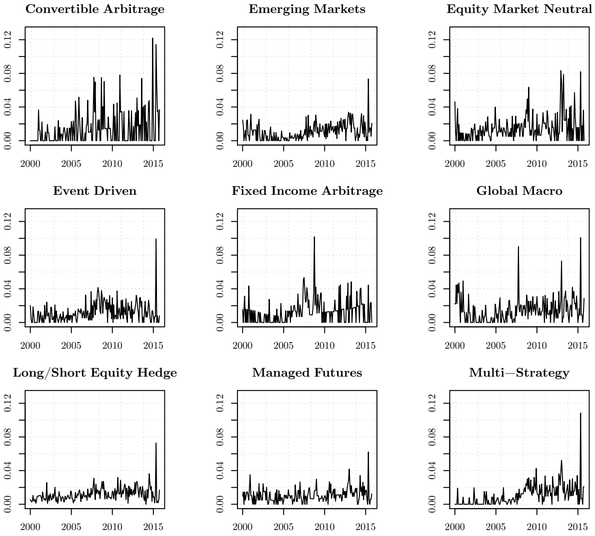
Performance par style (2000-2015)



Flux par style (2000-2015)



Défaut par style (2000-2015)

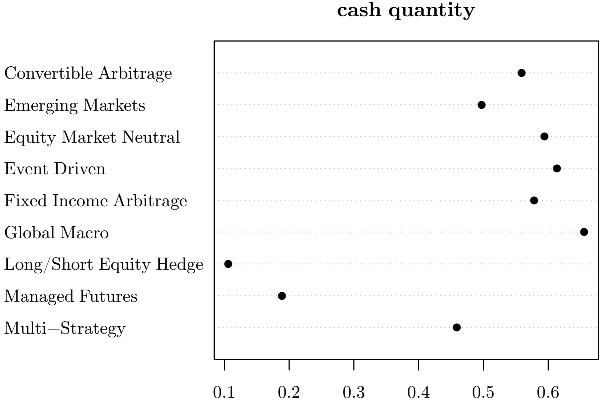


Calibration par style

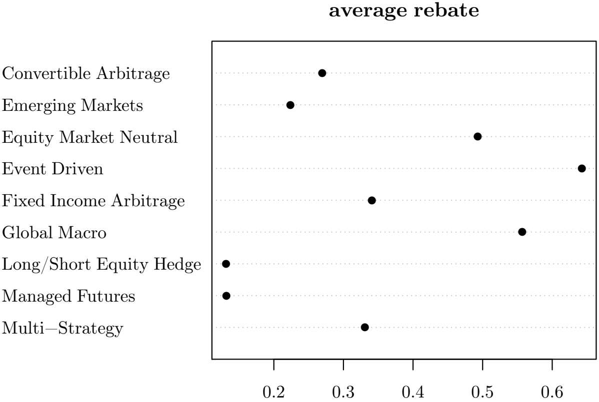
Nous supposons que l'effet de contagion est nul ($a = 0$)

1. Nous calculons la performance moyenne, le nombre moyen de flux négatifs (π) et le pourcentage moyen de défauts par style
2. Nous calibrons les 3 paramètres ρ, $\bar{\theta}$ and λ à partir de conditions de moments issues du modèle
3. Nous obtenons le niveau moyen de cash $\delta^*(\bar{\theta}, \pi, \lambda, \rho)$ par style
4. Nous classons les styles en fonction des caractéristiques de liquidité de financement (gate: $\bar{\theta}$) et de marché (haircut: λ)

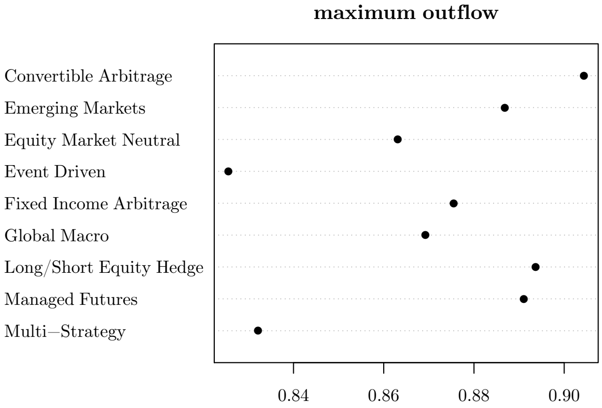
Montant de cash moyen par style



Haircut moyen par style



Gate moyen par style



Contents

Conclusion

Ce que nous avons:

- Nous avons un modèle d'allocation d'un portefeuille soumis à des rachats
- Les implications du modèle permettent de comprendre comment le gérant s'adapte aux différentes conditions de liquidité
- L'application à des données de hedge funds permet de filtrer les styles les plus exposés à la liquidité

Ce qu'il nous reste à faire:

- Construire un indicateur synthéthique du niveau de transformation de liquidité

Figure: Optimal cash holdings $\delta^*(\overline{\theta}, \pi, \lambda, \rho_1, \rho_2, a)$

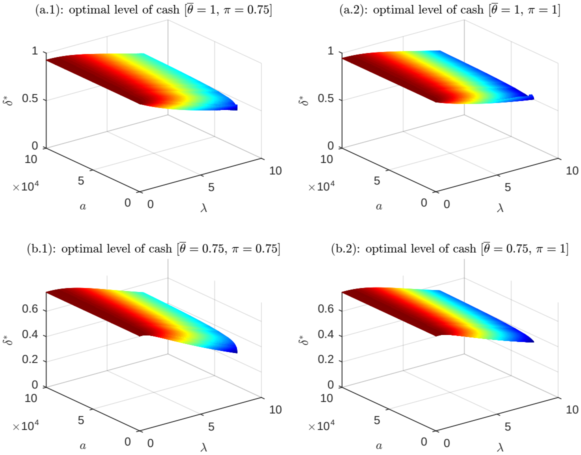


Figure: Expected fund's value when the hedge fund has optimal cash holdings $\delta^*(\overline{\theta}, \pi, \lambda, \rho_1, \rho_2, a)$

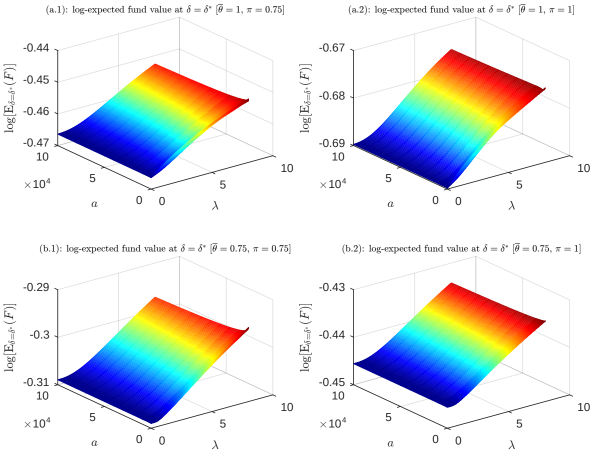


Figure: Default probabilities when the hedge fund has optimal cash holdings $\delta^*(\overline{\theta}, \pi, \lambda, \rho_1, \rho_2, a)$

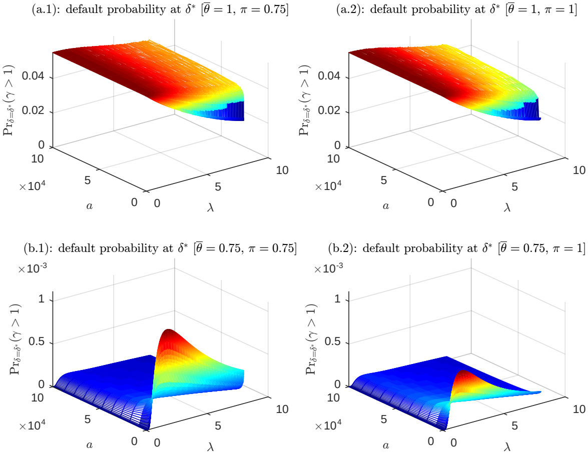


Figure: Expected price multiplier (rebate) on the secondary market